

PHẦN A. GIẢI TÍCH

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

§1. LŨY THỪA

I. KHÁI NIỆM LŨY THỪA

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương. Với a là số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số } a}$$

Với $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \end{aligned}$$

Trong biểu thức a^n , ta gọi a là cơ số, n là số mũ.

- **Chú ý:** 0^0 và a^{-n} không có nghĩa.

Ví dụ 1: Tính giá trị biểu thức

$$A = \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-5} \cdot 8^{-3} \right] : (-2)^{-5}$$

Giải

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-5} \cdot 8^{-3} \right] : (-2)^{-5} \\ &= (2^{-1})^{-5} \cdot (2^3)^{-3} : (-1 \cdot 2)^{-5} \\ &= 2^5 \cdot 2^{-9} : -(2^{-5}) \\ &= 2^{-4} : -(2^{-5}) = -2^{-4-(-5)} = -2 \end{aligned}$$

2. Phương trình $x^n = b$

a) Trường hợp n lẻ:

Với mọi số thực b , phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Trường hợp n chẵn:

- Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm;
- Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$;
- Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu.

3. Căn bậc n

a) Khái niệm: Cho số thực b và số nguyên dương n ($n \geq 2$). Số a được gọi là căn bậc n của b nếu $a^n = b$.

- ❖ Với n lẻ và $b \in \mathbb{R}$: có duy nhất một căn bậc n của b , kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$
- ❖ Với n chẵn và $b < 0$: không tồn tại căn bậc n của b ;
- ❖ Với n chẵn và $b = 0$: có một căn bậc n của b là số 0;
- ❖ Với n chẵn và $b > 0$: có hai căn trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

b) Tính chất căn bậc n

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a|, & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$
- $n\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức

a) $\sqrt[5]{9 \cdot \sqrt[5]{-27}}$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$

Giải:

$$a) \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{-27} = \sqrt[5]{3^2(-3^3)} = \sqrt[5]{-3^5} = -3$$

$$b) \sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(\sqrt{5})^2 \cdot \sqrt{5}} = \sqrt[3]{(\sqrt{5})^3} = \sqrt{5}$$

4. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Luỹ thừa của a với số mũ r là a^r xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ví dụ 3: Tính a) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ b) $(27)^{-\frac{2}{3}}$

Giải:

$$a) \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^4}} = \frac{1}{2}$$

$$b) (27)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^6}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

II. TÍNH CHẤT CỦA LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$$

$$\bullet a^\alpha \cdot b^\beta = a^{\alpha + \beta}$$

$$\bullet (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$$

$$\bullet (a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$$

$$\bullet \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

$$\bullet \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha - \beta}$$

❖ Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

❖ Nếu $a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Tính

a) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}}$

b) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 0,25^{-\frac{5}{2}}$

c) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$

d) $2^{-1}, 1^{3,75}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

e) $98^0, 32^{1/5}, \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$

Bài 2. Tính

a/ $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$

b/ $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}$

c/ $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$

d/ $\sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}$

Bài 3. Rút gọn biểu thức

a/ $\frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$

b/ $\frac{b^{\frac{1}{5}} \left(\sqrt[5]{b^4} - \sqrt[5]{b^{-1}} \right)}{b^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{b^{-2}} \right)}, b \neq 1$

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA

I. KHÁI NIỆM

Hàm số $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là *hàm số lũy thừa*.

Ví dụ 1: $y = x^2$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = x^{-3}$.

- **Chú ý:** Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α
 - α nguyên dương: $D = \mathbb{R}$
 - α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 - không nguyên: $D = (0; +\infty)$

II. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R}; x > 0)$$

Ví dụ 2:

$$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3} x^{\left(\frac{4}{3}-1\right)} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(x^{\sqrt{5}}\right)' = \sqrt{5}x, \quad (x > 0)$$

☞ **Chú ý:**
$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

Ví dụ 3:
$$\begin{aligned} \left[(3x^2 - 5x + 1)^{\frac{3}{4}}\right]' &= \frac{3}{4} (3x^2 - 5x + 1)^{-\frac{1}{4}} (3x^2 - 5x + 1)' \\ &= \frac{3}{4} (3x^2 - 5x + 1)^{-\frac{1}{4}} (6x - 5) \end{aligned}$$

III. KHẢO SÁT HÀM SỐ LŨY THỪA $y = x^\alpha$

$y = x^a, a > 0$	$y = x^a, a < 0$
1. Tập xác định: $D = (0; +\infty)$	1. Tập xác định: $D = (0; +\infty)$
2. Sự biến thiên	2. Sự biến thiên
$y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0$	$y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0$
Giới hạn đặc biệt:	Giới hạn đặc biệt:
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$
Tiệm cận : Không có	Tiệm cận :
	Ox là tiệm cận ngang,
	Oy là tiệm cận đứng của đồ thị.

- **Chú ý:** Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.

Ví dụ 4: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^{-\frac{2}{3}}$

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

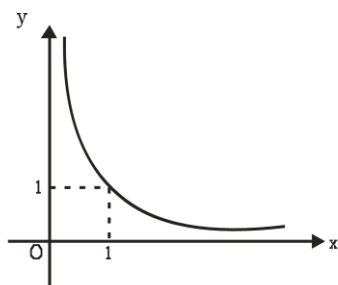
$$\text{Sự biến thiên: } y' = \frac{-2}{3} x^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{3x^{\frac{5}{3}}} < 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên D

- TC : $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$
- Đồ thị có tiệm cận ngang là trục hoành, tiệm cận đứng là trục tung

BBT :	x	$-\infty$	$+\infty$
y'		-	
y	$+\infty$		0

Đồ thị:



BÀI TẬP

1. Tìm tập xác định của các hàm số

a. $y = (1-x)^{-\frac{1}{3}}$

b. $y = (2-x^2)^{\frac{3}{5}}$

c. $y = (x^2-1)^{-2}$

2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (2x^2 - x + 1)^{\frac{1}{3}}$

b) $y = (x^2 - x - 2)^{\sqrt{2}}$

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

a) $y = x^{\frac{4}{3}}$

b) $y = x^{\frac{5}{3}}$

§3. LÔGARIT

I. KHÁI NIỆM LÔGARIT

1. Định nghĩa: Cho 2 số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là *lôgarit cơ số a của b* và kí hiệu là $\log_a b$

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$$

Ví dụ 1: a) $\log_2 8 = 3$ vì $2^3 = 8$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2 \text{ vì } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$$

2. Tính chất: Cho hai số dương a và b , $a \neq 1$.

Ta có tính chất sau:

- ❖ $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1$
- ❖ $a^{\log_a b} = b, \log_a a^\alpha = \alpha$

Ví dụ 2: a) $A = \log_2 \sqrt[5]{8} = \log_2 8^{\frac{1}{5}}$

$$= \log_2 (2^3)^{\frac{1}{5}} = \log_2 2^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= 9^{2\log_3 4 + 4\log_{81} 2} = 9^{2\log_3 4} \cdot 9^{4\log_{81} 2} \\ &= (3^2)^{2\log_3 4} \cdot (9^2)^{2\log_{81} 2} = 3^{4\log_3 4} \cdot 81^{2\log_{81} 2} \\ &= (3^{\log_3 4})^4 \cdot (81^{\log_{81} 2})^2 = 4^4 \cdot 2^2 = 1024 \end{aligned}$$

II. QUY TẮC TÍNH LÔGARIT

1. Lôgarit của một tích

Định lí 1: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có :

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

Ví dụ 3: $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 9.4 = \log_6 36 = 2$

2. Lôgarit của một thương

Định lí 2: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có :

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

Ví dụ 4: $\log_7 49 - \log_7 343 = \log_7 \frac{49}{343} = \log_7 \frac{1}{7} = -\log_7 7 = -1$

3. Lôgarit của một lũy thừa

Định lí 3: Cho 2 số dương a, b với $a \neq 1$. Với mọi số α , ta có

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$

Ví dụ 5:

a) $\log_2 4^{\frac{1}{7}} = \log_2 2^{\frac{2}{7}} = \frac{2}{7} \log_2 2 = \frac{2}{7}$

b) $\log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 15 = \log_5 \sqrt{3} - \log_5 \sqrt{15}$
 $= \log_5 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_5 5^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

III. ĐỔI CƠ SỐ

Định lí 4: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$ ta có

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Đặc biệt:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} (b \neq 1); \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b (\alpha \neq 0)$$

IV. LÔGARIT THẬP PHÂN – LÔGARIT TỰ NHIÊN

1. **Lôgarit thập phân:** là lôgarit cơ số 10.

$\log_{10} b$ được viết là: $\log b$ hoặc $\lg b$

2. **Lôgarit tự nhiên :** là lôgarit cơ số e

$\log_e b$ được viết là: $\ln b$

BÀI TẬP

Bài 1: Tính giá trị biểu thức

$$A = \log_{\frac{1}{3}} 5 \cdot \log_{25} \frac{1}{27}; \quad B = 4^{3\log_8 3 + 2\log_{16} 5} \quad C = (4)^{2 - \log_2 3}$$

Bài 2: Tính

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \log_2 \frac{1}{8} & \text{b) } \log_{\frac{1}{4}} 2 & \text{c) } \log_3 \sqrt[4]{3} \\ \text{d) } \log_{0,5} 0,125 & \text{e) } \log_{\frac{1}{2}} 2 \cdot \sqrt[3]{2} & \text{f) } \log_{\frac{1}{3}} 27 \cdot \sqrt[3]{3} \end{array}$$

Bài 3: Tính

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 4^{\log_2 3} & \text{b) } 27^{\log_9 2} & \text{c) } 9^{\log_{\sqrt{3}} 2} \\ \text{d) } 4^{\log_8 27} & \text{e) } (5)^{\log_{125} 27} & \text{f) } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2 - \log_{\sqrt{3}} 5} \end{array}$$

§4. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

A. LÝ THUYẾT

I. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

Giả sử $a > 0$ và $a \neq 1$

Hàm số $y = a^x$ được gọi là **hàm số mũ** cơ số a

☞ **Lưu ý:** Hàm số $y = e^x$ còn được kí hiệu là $y = \exp(x)$.

2. Đạo hàm

Định lí 1

a) Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Ta có:

$$(e^x)' = e^x$$

b) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên $\mathbf{K}$ thì hàm hợp $y = a^u$ cũng có đạo hàm trên $\mathbf{K}$ và

Ta có:

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$\text{và } (a^u)' = u' a^u \ln a$$

Ví dụ 1:

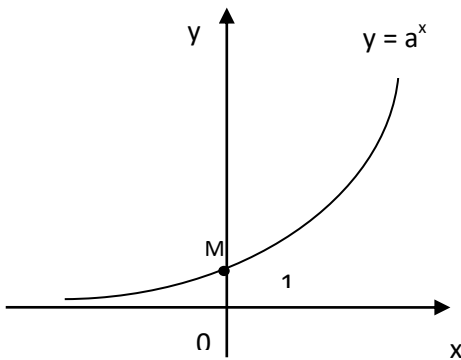
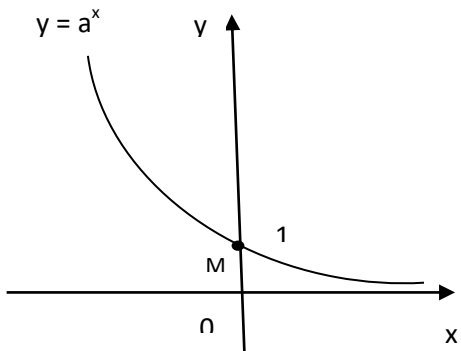
$$a/ (2^x)' = 2^x \ln 2$$

$$b/ (3^{\cos x})' = (\cos x)' \cdot 3^{\cos x} \ln 3 = -\sin x \cdot 3^{\cos x} \ln 3$$

$$c/ (e^{2x})' = (2x)' e^{2x} = 2 e^{2x}$$

$$d/ (e^{\sin x})' = (\sin x)' e^{\sin x} = \cos x e^{\sin x}$$

3. Khảo sát hàm số $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$)

$A > 1$	$0 < a < 1$
a) Tập xác định là $\mathbb{R}$; tập giá trị là khoảng $(0; +\infty)$ b) Đồng biến trên $\mathbb{R}$ c) Đồ thị : -Đi qua điểm $M(0;1)$ -Nằm phía trên trục hoành -Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang	a) Tập xác định là $\mathbb{R}$; tập giá trị là khoảng $(0; +\infty)$ b) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$ c) Đồ thị : -Đi qua điểm $M(0;1)$ -Nằm phía trên trục hoành -Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang
	

II. HÀM SỐ LÔGARIT

1. Định nghĩa

Giả sử $a > 0$ và $a \neq 1$. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là **hàm số lôgarit** cơ số a .

☞ Lưu ý:

kí hiệu $y = \log x$ (hoặc $\lg x$) là hàm số lôgarit cơ số 10
 $y = \ln x$ là hàm số lôgarit cơ số e .

2. Đạo hàm

Định lí 2

a) Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm tại mọi điểm tại mọi $x > 0$ và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

b) Nếu hàm số $u = u(x) > 0$ và có đạo hàm trên $\mathbf{K}$ thì hàm hợp $y = \log_a u$ có đạo hàm trên $\mathbf{K}$ và

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

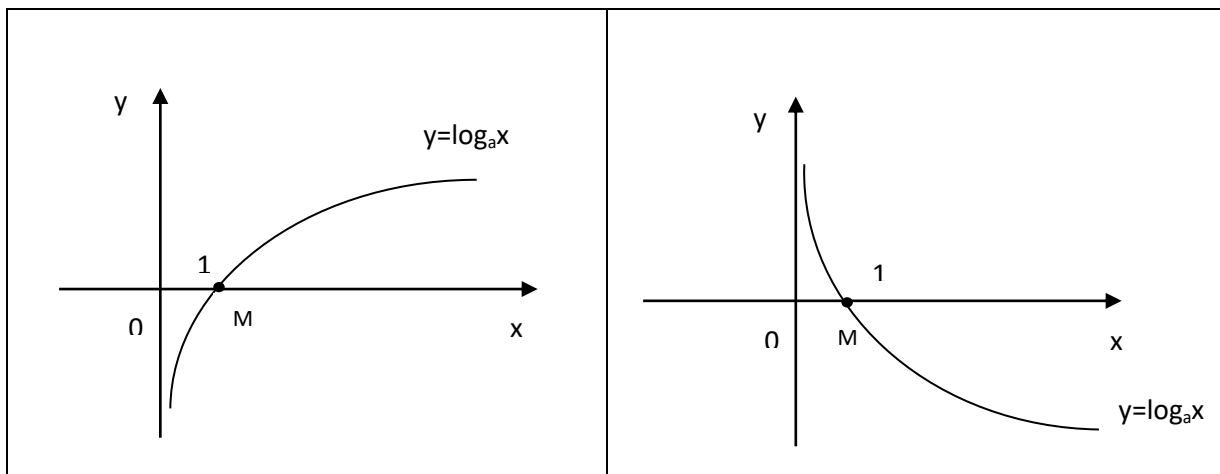
Ví dụ 2:

$$a) \quad (\log_3 \cos x)' = \frac{(\cos x)'}{\cos x \cdot \ln 3} = \frac{-\sin x}{\cos x \cdot \ln 3} = \frac{-\tan x}{\ln 3}$$

$$b) \quad (\ln \sqrt{1+x^2})' = \frac{(\sqrt{1+x^2})'}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2}$$

3. Khảo sát hàm số $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$)

$a > 1$	$0 < a < 1$
a) Tập xác định: $D = (0; +\infty)$; tập giá trị là $\mathbf{R}$ b) Đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ c) Đồ thị : -Đi qua điểm $M(1;0)$ -Nằm ở bên phải trục tung -Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.	a) Tập xác định: $D = (0; +\infty)$; tập giá trị là $\mathbf{R}$ b) Nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ c) Đồ thị : -Đi qua điểm $M(1;0)$ -Nằm ở bên phải trục tung - Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.



B. BÀI TẬP

1/ Tìm tập xác định của các hàm

a) $y = \log_2(5 - 2x)$; b) $y = \log_2(x^2 - 2x)$

c) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4x + 3)$; d) $y = \log_{0,4}\left(\frac{3x+2}{1-2x}\right)$

2/ Tìm x thỏa

a) $2^x > 0,25$; b) $(0,5)^x < 16$;

b) c) $\log_{\frac{1}{5}}(4x + 3) > 1$; d) $\log_3 \frac{3x+2}{1-x} < 1$

§5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. LÝ THUYẾT

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ căn bản

$$a^x = b \quad (1)$$

- ❖ $b < 0$: phương trình (1) vô nghiệm
- ❖ $b > 0$: phương trình (1) có nghiệm duy nhất: $x = \log_a b$.

2. Cách giải một số phương trình mũ đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số

$$a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$\begin{aligned} 9^{x+1} = 27^{x-2} &\Leftrightarrow (3^2)^{x+1} = (3^3)^{x-2} \\ &\Leftrightarrow 3^{2x+2} = 3^{3x-6} \\ &\Leftrightarrow 2x+2 = 3x-6 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$.

b) Phương pháp đặt ẩn phụ:

$$\text{đặt } t = a^{u(x)}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình

$$\begin{aligned} 3^{2x-2} + 2 \cdot 3^{x-1} - 3 &= 0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow 3^{2(x-1)} + 2 \cdot 3^{x-1} - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3^{x-1})^2 + 2 \cdot 3^{x-1} - 3 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt: } t = 3^{x-1}, (t \geq 0)$$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$\Rightarrow t = 1 \text{ (nhận)} \text{ và } t = 3 \text{ (nhận)}$$

$$\text{*với } t = 1 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 1 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{*với } t = 3 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 2$.

c) Phương pháp lôgarit hóa:

$$u > 0, v > 0 \text{ thì } \log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$$

Ví dụ 3: Giải phương trình $3^{x-1} \cdot 2^x = 4^{x-2}$

$$3^{x-1} \cdot 2^x = 4^{x-2} \Leftrightarrow \log_2(3^{x-1} \cdot 2^x) = \log_2(4^{x-2})$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3^{x-1}) + \log_2(2^x) = \log_2(4^{x-2})$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \log_2 3 + x \log_2 2 = (x-2) \log_2 4$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \log_2 3 + x = (x-2) \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 3 - 1)x = \log_2 3 - 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_2 3 - 4}{\log_2 3 - 1} = \frac{\log_2 3 - \log_2 16}{\log_2 3 - \log_2 2} = \frac{\log_2 \frac{3}{16}}{\log_2 \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{16}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{16}$

I. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

1. Phương trình lôgarit căn bản:

$$\log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m \quad (m \in \mathbb{R})$$

Ví dụ 4: $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$

2. Cách giải một số phương trình lôgarit đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số:

$$u > 0, v > 0 \text{ thì } \log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$$

Ví dụ 5: Giải phương trình $\log_4 x^2 = \log_2(-x + 2)$

Điều kiện: $-x + 2 > 0$ và $x \neq 0 \Leftrightarrow x < 2$ và $x \neq 0$

$$\log_4 x^2 = \log_2(-x + 2) \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2(-x + 2) \Leftrightarrow x = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{nhận})$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 6: Giải phương trình

$$\frac{6}{1+\log_2 x} + \frac{4}{2\log_2 x} = 3$$

$$\text{đk: } x > 0; x \neq \frac{1}{2}; x \neq 1$$

$$\frac{6}{1+\log_2 x} + \frac{4}{2\log_2 x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{1+t} + \frac{4}{2t} = 3; (t = \log_2 x); (t \neq 0, t \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow 12t + 4 + 4t = 6t + 6t^2$$

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 10t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2; t = -\frac{1}{3}$$

$$*t = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$$

$$*t = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_2 x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 4$ hoặc $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

B. BÀI TẬP

Câu 1: Giải các phương trình sau đây

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} = \left(\frac{8}{12}\right)^x$

b) $2^{3-x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2x^2}$

c) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$

d) $64^x - 8^x - 56 = 0$

e) $34^x - 26^x = 9^x$

Câu 2: Giải các phương trình sau đây

a) $\log_3(5x+3) = \log_3(7x+5);$

b) $\log(x-1) - \log(2x-11) = \log 2.$

c) $\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3;$

d) $\log(x^2 - 6x + 7) = \log(x-3).$

e) $\log_{x-1} 4 = 1 + \log_2(x-1).$

§ 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. LÝ THUYẾT

Bất Phương trình mũ cơ bản	Bất Phương trình lôgarit cơ bản
Dạng : $a^x > b$; ($a > 0$ và $a \neq 1$) hoặc $a^x < b$; $a^x \leq b$; $a^x \geq b$ Lưu ý công thức: Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$ Cách giải: Có thể dùng một trong các phương pháp sau đây - Đưa về cùng một cơ số - Phương pháp đặt ẩn phụ - Phương pháp lôgarit hóa	Dạng : $\log_a x > b$; ($a > 0$ và $a \neq 1$) hoặc $\log_a x < b$; $\log_a x \geq b$; $\log_a x \leq b$ Lưu ý công thức: Nếu $a > 1$: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$ Nếu $0 < a < 1$: $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$ Cách giải: Có thể dùng một trong các phương pháp sau đây - Đưa về cùng một cơ số - Phương pháp đặt ẩn phụ - Phương pháp mũ hóa

Ví dụ 1: a) Giải bất phương trình $2^{3x-4} > 0,25$

$$\Leftrightarrow 2^{3x-4} > 2^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 3x-4 > -2$$

$$\Leftrightarrow x > 2/3$$

Vậy tập nghiệm của bpt là: $S = (2/3 ; +\infty)$.

b) Giải bất phương trình $\log_{0,5}(1-2x) > 1$

$$\text{ĐK: } 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 1/2$$

$$\Leftrightarrow \log_{0,5}(1-2x) > \log_{0,5}0,5$$

$$\Leftrightarrow 1-2x < 0,5$$

$$\Leftrightarrow 1/4 < x$$

Vậy tập nghiệm của bpt là: $S = (1/4; 1/2)$.

c) Giải bất phương trình : $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$$
 (2)

$$\text{Đặt } t = 2^x > 0, (t > 0)$$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 > 0 \Leftrightarrow t < 1 \text{ hoặc } t > 2$$

$$* \text{ Với } 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < 2^x < 1 \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0)$$

$$* \text{ Với } t > 2 \Leftrightarrow 2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in (1; +\infty)$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là: $S = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

B. BÀI TẬP

$$1/ \log_8(4 - 2x) \geq 2$$

$$2/ \log_{\frac{1}{5}}(3x - 5) > \log_{\frac{1}{5}}(x + 1)$$

$$3/ 2^{3+4x} > 1$$

$$4/ 16^x < 0,25$$

$$5/ \log_{1/3}(x^2 - 6x + 5) = 2\log_3(2 - x) > 0$$

ÔN TẬP CHƯƠNG I



1/ Giải các phương trình và bất phương trình

$$a) 32^{\frac{5+5}{x-7}} = 0,125.128^{\frac{x+17}{x-3}}$$

$$b) 5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$$

$$c) \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{2-x}$$

$$d) 25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$e) 2(\log_2 x)^2 x - 14 \log_4 x + 3 = 0$$

$$f) 7^{1+2x} - 8 \cdot 7^x + 1 = 0$$

$$i) \log_2(x - 3) + 2 \log_4 3 \cdot \log_3 x = 2$$

$$j) 3^{1-x} - 3^x + 2 = 0$$

$$k) (\log_2 x)^2 + 3 \log_2(2x) - 1 = 0$$

$$h) \log_3(x + 2) > 1 - \log_3 x$$

2/ Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$.

CHƯƠNG II. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG.

§1. NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$.

Ví dụ 1:

a) Hàm số $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ vì $F'(x) = (x^2)' = 2x; \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

b) Hàm số $F(x) = \ln x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ vì $F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}; \forall x \in (0; +\infty)$.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Kí hiệu

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

- **Chú ý:** Biểu thức $f(x)dx$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$

$$(\text{Vì } dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx)$$

Ví dụ 2:

a) Với $x \in (-\infty; +\infty); \int 2x dx = x^2 + C;$

b) Với $x \in (0; +\infty); \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C;$

c) Với $x \in (-\infty; +\infty); \int \cos x dx = \sin x + C$

2. Tính chất của nguyên hàm

$$1) \int f(x)' dx = f(x) + C;$$

$$2) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx; k \text{ là hằng số khác } 0;$$

$$3) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Ví dụ 3:

$$1) \int (\cos x)' dx = \int (-\sin x) dx = \cos x + C$$

2) Với $x \in (0; +\infty)$ ta có

$$\int \left(5 \sin x + \frac{3}{x} \right) dx = 5 \int \sin x dx + 3 \int \frac{1}{x} dx = -5 \cos x + \ln |x| + C$$

3. Sự tồn tại nguyên hàm

Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

Ví dụ 4:

a) Hàm số $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ có nguyên hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và

$$\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$$

b) Hàm số $g(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ có nguyên hàm trên từng khoảng $(k\pi; (k+1)\pi)$; $(k \in \mathbb{Z})$

$$\text{và } \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$$

4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

$\int 0 dx = C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$\int dx = x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad (x \neq 0)$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1 :

Nếu $\int f(u) du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

❖ **Hệ quả.** Với $u = ax + b$ ($a \neq 0$), ta có

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

Ví dụ 5: Tính $\int \sin(3x - 1) dx$

Vì

$\int \sin u dx = -\cos u + C$ nên theo hệ quả ta có

$$\int \sin(3x - 1) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x - 1) + C$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Định lý 2:

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

▪ **Chú ý:**

Vì $u'(x)dx = du$; $v'(x)dx = dv$; nên đẳng thức trên còn được viết dưới dạng:

$$\int u dv = uv - \int v dv$$

Đây là công thức tính nguyên hàm từng phần.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Ví dụ 6: Tính $I = \int \cos x \sin^3 x dx$

Giải

Đặt $t = \sin x \Leftrightarrow dt = \cos x dx$

Khi đó

$$I = \int \cos x \sin^3 x dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

Ví dụ 7: Tính các tích phân sau

a) $\int x e^x dx$ b) $\int x \cos x dx$ c) $\int \ln x dx$

Giải

a) $I = \int x e^x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x du = x e^x - e^x + C$$

$$\text{b) } I = \int x \cos x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$I = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

$$\text{c) } I = \int \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$I = \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

C. BÀI TẬP

1. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau

$$\text{a) } f(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}};$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{2^x - 1}{e^x}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x};$$

$$\text{d) } f(x) = \sin 5x \cdot \cos 3x$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-5)};$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{1}{(-2x+3)(2x+9)}$$

2. Sử dụng phương pháp đổi biến, hãy tính

$$\text{a) } \int (3-x)^{10} dx;$$

$$\text{b) } \int x(1+x^2)^{20} dx$$

$$\text{c) } \int \cos^2 x \cdot \sin x dx;$$

$$\text{d) } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$$

3. Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính:

$$\text{a) } \int x \sin^2 x dx;$$

$$\text{b) } \int x^2 \sin x dx$$

$$\text{c) } \int \frac{x}{\sin^2 x} dx;$$

$$\text{d) } \int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$$

e) $\int x \ln(x+1) dx;$

f) $\int x \sin(2x+1) dx$

g) $\int (1-x) \cos x dx;$

h) $\int x \sin x dx$

§ 2. TÍCH PHÂN

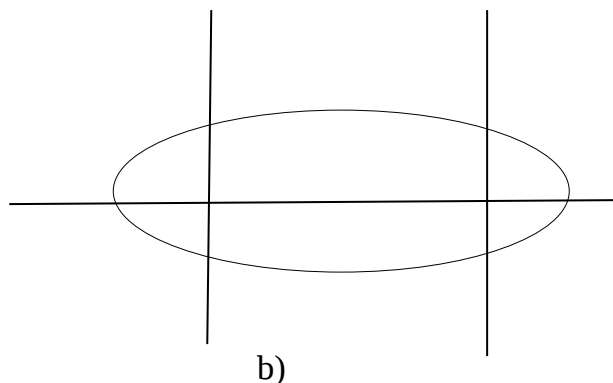
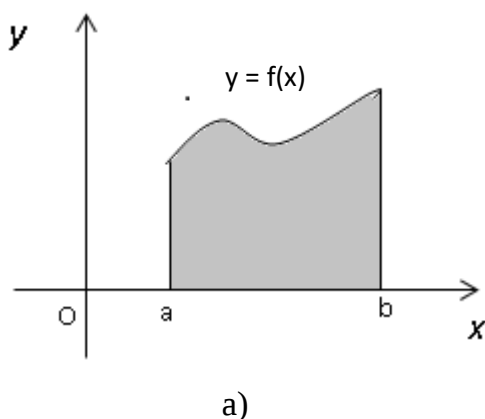
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Khái niệm tích phân

1. Diện tích hình thang cong

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ được gọi là **hình thang cong** (H. 1a)

Ở lớp dưới, ta đã biết cách tính diện tích hình chữ nhật, hình tam giác. Bây giờ, ta xét bài toán tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi một đường cong kín bất kì (H. 1b).



Hình 1

Bằng cách kẻ các đường thẳng song song với các trục tọa độ, ta chia D thành những hình nhỏ là những hình thang cong (H.1a). Bài toán trên được đưa về tính diện tích của hình thang cong.

Bài toán tìm diện tích hình thang cong bất kì:

Cho hình thang cong giới hạn bởi các đường thẳng $x = a$; $x = b$; ($a < b$), trục hoành và đường cong $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$.

Với mỗi $x \in [a; b]$. Kí hiệu $S(x)$ là diện tích của phần hình thang cong đó nằm giữa hai đường thẳng vuông góc với Ox lần lượt tại a và x (H.2).

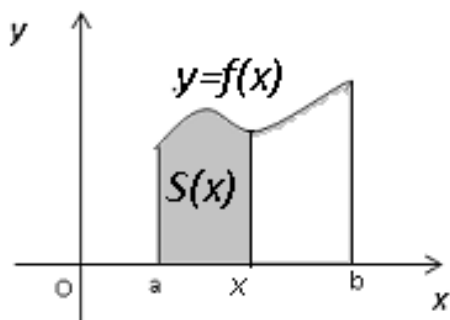
Ta chứng minh được $S(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì có một hằng số C sao cho $S(x) = F(x) + C$. Vì $S(a) = 0$ nên $F(a) + C = 0$ hay $C = -F(a)$.

Vậy $S(x) = F(x) - F(a)$.

Thay $x = b$ vào đẳng thức trên, ta có diện tích của hình thang cần tìm là

$$S(b) = F(b) - F(a).$$



2. Định nghĩa tích phân

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số $f(x)$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ta gọi a là cận dưới, b là cận trên, $f(x)dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

▪ Chú ý:

Trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước

$$\int_a^a f(x) dx = 0; \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Ví dụ 1:

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^3 = \frac{1}{3} (3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}$$

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

▪ **Nhận xét:**

- a) Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x) dx$ hay $\int_a^b f(t) dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a ; b mà không phụ thuộc vào biến số x hay t .
- b) Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ (H.1a). Vậy

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

II. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

$$\begin{aligned} 1) \quad & \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx; k \text{ là hằng số} \\ 2) \quad & \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \\ 3) \quad & \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính $\int_0^2 (4x^3 - 2x + 5) dx$

Giải

$$\int_0^2 (4x^3 - 2x + 5) dx = 4 \int_0^2 x^3 dx - 2 \int_0^2 x dx + 5 \int_0^2 dx = (x^4) \Big|_0^2 - (x^2) \Big|_0^2 + 5(x) \Big|_0^2 = 22$$

III. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến

Định lý. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Ví dụ 3: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

Giải

Đặt $u = \sin x$. Ta có $u' = \cos x$.

Khi $x = 0$ thì $u(0) = 0$, khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Vậy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

2. Phương pháp tích tích phân từng phần

Định lý. Nếu $u=u(x)$ và $v=v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) v'(x) dx &= (u(x)v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx \\ \text{hay } \int_a^b u dv &= uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính

$$I = \int_1^e \ln x dx$$

Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$$

Ta có

$$I = \int_1^e \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - 1 \ln 1 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tính

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$$

Giải

Đặt $u = 1 + x^2$; ta có $u' = 2x$; $u(0) = 1$; $u(1) = 2$ nên

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u^2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) = \frac{3}{16}.$$

Bài 2: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

Do đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = (-x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = (-x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1.$$

Bài 3: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$

Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = (x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = (x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

BÀI TẬP

1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^2 (x\sqrt{x} + 2x^3 + 5) \, dx$

b) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{(1-x)^2} \, dx;$

$$c) \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx;$$

$$e) \int_0^{\pi} \sin 2x \cos^2 x dx$$

$$b) \int_0^2 (x^3 \sqrt{x} + x^5 \sqrt{x} + 7x) dx;$$

2. Sử dụng phương pháp đổi biến, hãy tính

$$a) \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx$$

$$b) I = \int_0^1 \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx;$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$$

$$d) \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx;$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx$$

$$b) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx;$$

3. Sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần, hãy tính

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin x dx$$

$$b) \int_1^e x^2 \ln x dx;$$

$$c) I = \int_1^{\pi} x(1 + \cos x) dx$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 3) \sin x dx;$$

$$e) \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

$$b) \int_0^2 (x^2 - 2x - 1) e^{-x} dx;$$

§3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

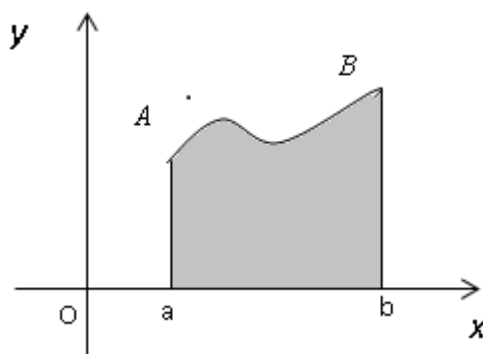
A. Kiến thức cơ bản

I. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

1. Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ (H. 4) được tính bởi công thức

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

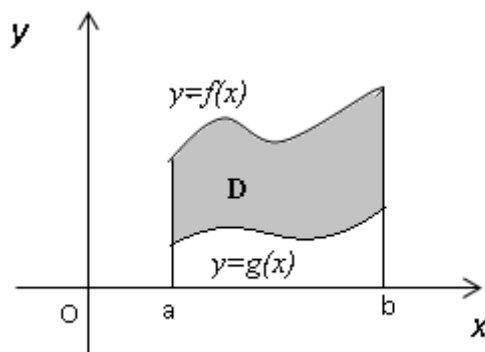


Hình 4

2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Cho hai đường cong $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a$; $x = b$ (H. 5) được tính bởi công thức.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (*)$$



Hình 5

- **Chú ý:** Khi áp dụng công thức (*), cần khử dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Muốn vậy, ta giải phương trình $f(x) - g(x) = 0$ trên đoạn $[a, b]$.

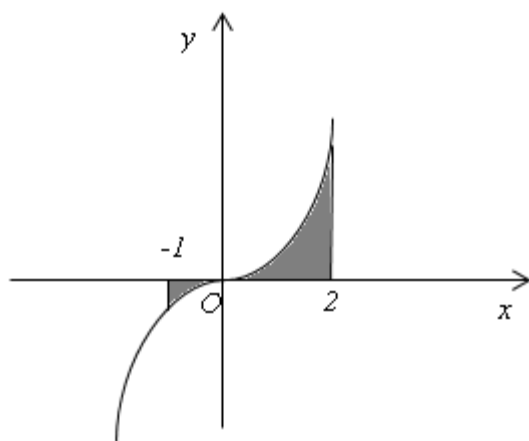
Giả sử phương trình có hai nghiệm $c; d$ ($c < d$). Khi đó, $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên các đoạn $[a; c]; [c; d]; [d; b]$. Trên mỗi đoạn đó, chẳng hạn trên đoạn $[a; c]$, ta có

$$\int_a^c |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^c [f(x) - g(x)] dx \right|$$

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1; x = 2$ (H.6)

Giải

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 |x^3| dx = \int_{-1}^0 (-x)^3 dx + \int_0^2 x^3 dx \\ &= -\frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{17}{4} \end{aligned}$$



Hình 6

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số: $y = x^2 - x - 4$ và $y = x - 1$.

Giải

Ta có: hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^2 - x - 4 = x - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 4 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{-1}^3 |x^2 - 2x - 3| dx$$

$$\text{Do } x^2 - 2x - 3 < 0; \forall x \in [-1; 3]$$

Suy ra

$$S = \int_{-1}^3 |x^2 - 2x - 3| dx = S = \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{32}{3}$$

II. TÍNH THỂ TÍCH

1. Thể tích của vật thể

Vật thể giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng $x = a$; $x = b$; $a < b$, $S(x)$ là diện tích của thiết diện của vật thể trên một mặt phẳng vuông góc với Ox . $S(x)$ liên tục trên $[a; b]$.

Thể tích vật thể là

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

2. Thể tích của khối chóp và khối chóp cụt

* Thể tích của khối chóp là:

$$V = \frac{Bh}{3}$$

Với khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B .

* Thể tích của khối chóp cụt là:

$$V = \frac{h}{3} (B + \sqrt{B \cdot B'} + B')$$

Với khối chóp cụt tạo bởi khối chóp đỉnh S có diện tích hai đáy lần lượt là $B; B'$ và có chiều cao bằng h .

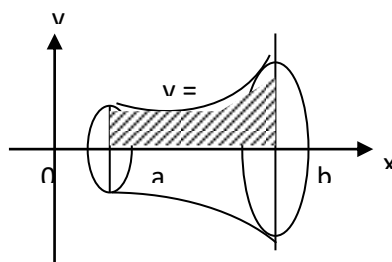
III. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

1. Thể tích khối tròn xoay quay quanh trục Ox

Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$ (C); $x = a$; $x = b$, $y = 0$;

($a < b$), quay quanh Ox

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

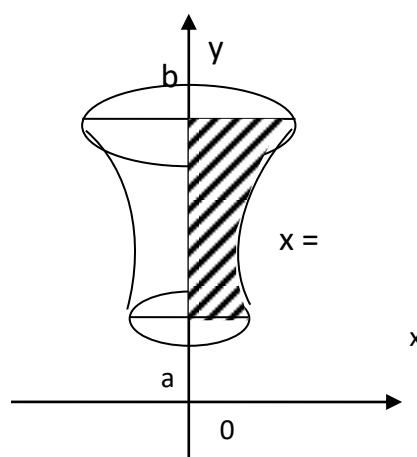


Hình 9

2. Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh Oy.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục Oy, $y = a$, $y = b$ ($a < b$) quay quanh Oy là:

$$V = \pi \int_a^b x^2(y) dy$$



Hình 10

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$.

Giải

$$\text{Ta có: } f(x) - g(x) = (x^3 - x) - (x - x^2) = x^3 + x^2 - 2x$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2; x_2 = 0; x_3 = 1.$$

Vậy diện tích hình phẳng đã cho là:

$$S = \int_{-2}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx \right| \\
&= \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_{-2}^0 + \left| \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \right|_0^1 = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}.
\end{aligned}$$

Bài 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay do phần đường tròn (C): $x^2 + y^2 = R^2$ tâm O khi quay xung quanh trục Ox.

Giải

Khi (C) quay quanh Ox ta có mặt cầu, thể tích khối cầu là

$$V = \pi \int_{-R}^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

BÀI TẬP

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $y = x^2; y = x + 2;$

b) $y = |\ln x|;$

c) $y = (x - 6)^2; y = 6x - x^2.$

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm M(2; 5) và trục Oy.

3. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau khi quay xung quanh trục Ox:

a) $y = 1 - x^2; y = 0;$

b) $y = \cos x; y = 0; x = 0; x = \pi;$

c) $y = \tan x; y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{4}.$

ÔN TẬP CHƯƠNG II**1. Tính**

a) $\int (2 - x)\sin x dx;$

b) $\int \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{x}} dx$

c) $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx;$

d) $\int xe^x dx$

e) $\int x \cos x dx;$

f) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx;$

h) $\int \frac{5}{(3-x)(x+1)} dx$

2. Tính:

a) $\int_0^3 3x(x + \sqrt{x^2 + 16}) dx;$

b) $\int_1^2 (2x^3 - \ln x) dx$

c) $\int_1^2 \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2} dx;$

d) $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$

3. Tính

a) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx;$

b) $\int_0^{\ln 2} e^x(e^x - 1)^2 dx$

c) $\int_1^e \frac{\sqrt{4 + 5\ln x}}{x} dx;$

d) $\int_0^1 x^2(x-1)^2 dx$

e) $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx;$

f) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx$

g) $\int_0^2 x^2 e^{3x} dx;$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cdot \sin^2 x dx$

3. Xét hình phẳng D giới hạn bởi $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ và $y = 2(1 - x)$.

a) Tính diện tích hình D.

b) Quay hình D xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.

CHƯƠNG III. SỐ PHỨC

§10. SỐ PHỨC

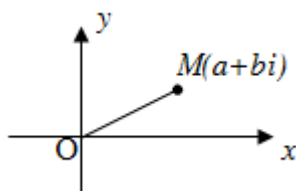
1. Số i : $i^2 = -1$

2. Định nghĩa số phức

- Tập hợp số phức: $\mathbb{C}$
- Số phức (dạng đại số): $z = a + bi$
($a, b \in \mathbb{R}$, a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$)
- z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 ($b = 0$)
 z là thuần ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của z bằng 0 ($a = 0$)
Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

3. Số phức bằng nhau: $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$

4. Biểu diễn hình học: Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ hay bởi $\vec{u} = (a; b)$ trong mp(Oxy) (mp phức)



5. Môđun của số phức: $z = a + bi$

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overline{OM}|$
- $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $\left| |z| - |z'| \right| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$

6. Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$

- $\bar{\bar{z}} = z; \quad \overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'; \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'; \quad \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}; \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
- z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

BÀI TẬP**Bài 1:** Tìm phần thực và phần ảo của số phức

a) $z = 1 - \pi i$

b) $z = \sqrt{2} - i$

c) $z = 2\sqrt{2}$

d) $z = -7i$

Bài 2: Tìm các số thực x, y biết

a) $(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i$

b) $(1 - 2x) - i\sqrt{3} = \sqrt{5} + (1 - 3y)i$

c) $(2x + y) + (2y - x)i = (x - 2y + 3) + (y + 2x + 1)i$

Bài 3: Tính $|z|$ biết :

a) $z = -2 + i\sqrt{3}$

b) $z = \sqrt{2} - 3i$

c) $z = -5$

d) $z = i\sqrt{3}$

Bài 4 : Tìm $\bar{z}$ biết:

a) $z = 1 - i\sqrt{2}$

b) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{3}$

c) $z = 5$

d) $z = 7i$

§11. CỘNG, TRỪ VÀ NHÂN SỐ PHỨC

1. Cộng và trừ số phức:

- $(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$ • $(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i$
- Số đối của $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$
- $\bar{u}$ biểu diễn z , $\bar{u}'$ biểu diễn z' thì $\bar{u}+\bar{u}'$ biểu diễn $z+z'$ và $\bar{u}-\bar{u}'$ biểu diễn $z-z'$.

2. Nhân hai số phức :

- $(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i$
- $k(a+bi)=ka+kbi$ ($k \in \mathbb{R}$)

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau

- a) $(4-i)+(2+3i)-(5+i)$ b) $2-i+\left(\frac{1}{3}-2i\right)$ c) $(2-3i)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}i\right)$
- d) $\left(3-\frac{1}{3}i\right)+\left(-\frac{3}{2}+2i\right)-\frac{1}{2}i$ e) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}i\right)-\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{5}i\right)$ f) $(2-3i)(3+i)$

Bài 2: Thực hiện các phép toán sau

- a) $(1+i)^2-(1-i)^2$ b) $(2+i)^3-(3-i)^3$ c) $(3+4i)^2$
- d) $(-1+i)^3-(2i)^3$ e) $(1-i)^{100}$ f) $(3+3i)^5$

§ 12. PHÉP CHIA SỐ PHỨC

1. Tổng và tích của hai số phức liên hợp:

Cho số phức $z = a + bi$, ta có:

- $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$
- $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

2. Phép chia hai số phức:

- $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} \quad (z \neq 0)$
- $\frac{z'}{z} = z' z^{-1} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} \quad \bullet \quad \frac{z'}{z} = w \Leftrightarrow z' = wz$

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm phần thực và phần ảo của các số phức sau:

- a) $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i} - \frac{\sqrt{2}-i}{i}$ b) $\frac{3}{1+2i}$ c) $\frac{1+i}{1-i}$
- d) $\frac{3+i}{(1-2i)(1+i)}$ e) $\frac{1+i}{2-i}$ f) $\frac{a+i\sqrt{b}}{i\sqrt{a}}$ g) $\frac{2-3i}{4+5i}$

Bài 2: Thực hiện các phép toán sau:

- a) $\left(\frac{1}{2} - 3i\right)^3$ b) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^2}{(3+2i)^2 - (2+i)^2}$ f) $(2-i)^6$

§ 13. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

1. Căn bậc hai của số phức:

- $z = x + yi$ là căn bậc hai của số phức $w = a + bi \Leftrightarrow z^2 = w \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$
- $w = 0$ có đúng 1 căn bậc hai là $z = 0$
- $w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai đối nhau
- Hai căn bậc hai của $a > 0$ là $\pm\sqrt{a}$
- Hai căn bậc hai của $a < 0$ là $\pm\sqrt{-a}i$

2. Phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (*) (A, B, C là các số phức cho trước, $A \neq 0$).

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

- $\Delta \neq 0$: (*) có hai nghiệm phân biệt $z_{1,2} = \frac{-B \pm \delta}{2A}$, (δ là 1 căn bậc hai của Δ)
- $\Delta = 0$: (*) có 1 nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$

Chú ý: Nếu $z_0 \in C$ là một nghiệm của (*) thì $\bar{z}_0$ cũng là một nghiệm của (*).

BÀI TẬP

Bài 1: Giải các phương trình sau (ẩn z):

a) $z^2 + |z| = 0$

b) $z^2 + |z|^2 = 0$

c) $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$

d) $z^2 - \bar{z} = 0$

e) $|z| - 2z = -1 - 8i$

f) $(4 - 5i)z = 2 + i$

g) $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$

h) $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$

i) $2|z| - 3z = 1 - 12i$

k) $(3 - 2i)^2(z + i) = 3i$

l) $[(2 - i)\bar{z} + 3 + i]\left(iz + \frac{1}{2i}\right) = 0$

m) $z\left(3 - \frac{1}{2}i\right) = 3 + \frac{1}{2}i$

o) $\frac{3+5i}{z} = 2-4i$

p) $(z+3i)(z^2-2z+5)=0$

q) $(z^2+9)(z^2-z+1)=0$

r) $2z^3-3z^2+5z+3i-3=0$

Bài 2: Giải các phương trình sau (ẩn x):

a) $x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$

b) $3\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$

c) $x^2 - (3-i)x + 4-3i = 0$

d) $3x^2 - x + 2 = 0$

e) $3x^3 - 24 = 0$

f) $2x^4 + 16 = 0$

g) $x^2 + 7 = 0$

h) $x^2 + (2-3i)x = 0$

ÔN TẬP CHƯƠNG III**Bài 1:** Thực hiện các phép tính sau:

a) $(2-i)(-3+2i)(5-4i)$

b) $\frac{3+7i}{2+3i} + \frac{5-8i}{2-3i}$

c) $(2-4i)(5+2i) + (3+4i)(-6-i)$

Bài 2: Cho các số phức $z_1 = 1+2i$, $z_2 = -2+3i$, $z_3 = 1-i$. Tính:

a) $z_1 + z_2 + z_3$

b) $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$

c) $z_1 z_2 z_3$

d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$

e) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$

f) $\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$

Bài 3: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = z^4 + iz^3 - (1+2i)z^2 + 3z + 1 + 3i$, với $z = 2+3i$

b) $B = (z - z^2 + 2z^3)(2 - z + z^2)$, với $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$

Bài 4: Tìm các số thực x, y sao cho:

a) $(1-2i)x + (1+2y)i = 1+i$

b) $\frac{x-3}{3+i} + \frac{y-3}{3-i} = i$

c) $(4-3i)x^2 + (3+2i)xy = 4y^2 - \frac{1}{2}x^2 + (3xy - 2y^2)i$

Bài 5: Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a) $z^2 + 5 = 0$

b) $z^2 + 2z + 2 = 0$

c) $z^2 + 4z + 10 = 0$

d) $z^2 - 5z + 9 = 0$

e) $-2z^2 + 3z - 1 = 0$

f) $3z^2 - 2z + 3 = 0$

g) $(z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 0$

h) $z^2 + \bar{z} + 2 = 0$

i) $z^2 = \bar{z} + 2$

k) $2z + 3\bar{z} = 2 + 3i$

l) $(z + 2i)^2 + 2(z + 2i) - 3 = 0$

m) $z^3 = \bar{z}$

n) $4z^2 + 8|z|^2 = 8$

o) $iz^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$

p) $(1 + i)z^2 + 2 + 11i = 0$

Bài 6: Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a) $x^2 - (3 + 4i)x + 5i - 1 = 0$

b) $x^2 + (1 + i)x - 2 - i = 0$

c) $3x^2 + x + 2 = 0$

d) $x^2 + x + 1 = 0$

e) $x^3 - 1 = 0$

Bài 7: Giải phương trình $z = \left(2 - \frac{z+1}{z-7}\right)^2$, biết $z = 3 + 4i$ là một nghiệm của phương trình.**Bài 8:** Giải các phương trình sau:

a) $z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0$

b) $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$

c) $z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1 = 0$

d) $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$

Bài 9: Chứng minh rằng: nếu $|z| \leq 1$ thì $\left|\frac{2z-i}{2+iz}\right| \leq 1$.

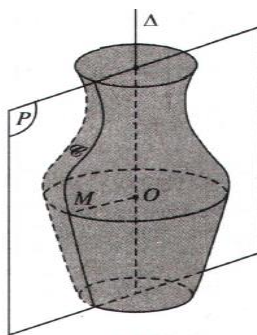
PHẦN B. HÌNH HỌC

Chương I. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

§1. KHÁI NIỆM VỀ MẶT TRÒN XOAY

I. SỰ TẠO THÀNH MẶT TRÒN XOAY

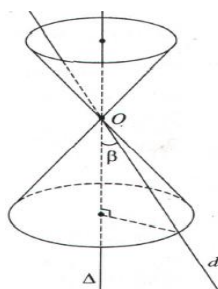
Trong không gian, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ và một đường (C). Khi quay (P) quanh Δ một góc 360° thì mỗi điểm M trên (C) vạch ra một đường tròn có tâm O thuộc Δ và nằm trên mp vuông góc với Δ . Khi đó (C) sẽ tạo nên một hình được gọi là mặt tròn xoay. (C) được gọi là đường sinh của mặt tròn xoay đó. Δ được gọi là trục của mặt tròn xoay.



II. MẶT NÓN TRÒN XOAY

1. Mặt nón tròn xoay

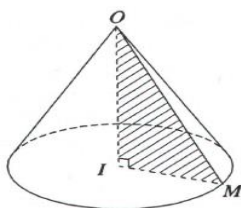
Trong mặt phẳng (P) có hai đường thẳng d và Δ cắt nhau tại điểm O và tạo thành góc nhọn β . Khi quay (P) xung quanh Δ thì d sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O. Δ gọi là trục, d gọi là đường sinh, góc 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón đó.



2. Hình nón tròn xoay

Cho $\triangle OIM$ vuông tại I . Khi quay nó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình được gọi là hình nón tròn xoay.

- Hình tròn (I, IM) : mặt đáy
- O : đỉnh
- OI : đường cao
- OM : đường sinh
- Phần mặt tròn xoay sinh ra bởi OM : mặt xung quanh.



3. Khối nón tròn xoay

Phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình nón đó được gọi là khối nón tròn xoay.

- Điểm ngoài: Điểm không thuộc khối nón.
- Điểm trong: Điểm thuộc khối nón nhưng không thuộc hình nón.
- Đỉnh, mặt đáy, đường sinh

4. Diện tích xung quanh của hình nón

a) Một hình chóp được gọi là nội tiếp hình nón nếu đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đường tròn đáy của hình nón và đỉnh của hình chóp là đỉnh của hình nón.

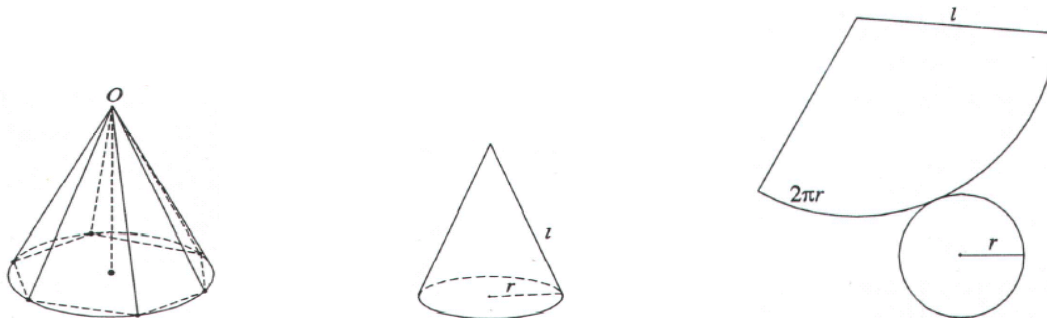
Diện tích xung quanh của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh của hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

c) Diện tích xung quanh của hình nón bằng nửa tích độ dài đường tròn đáy với độ dài đường sinh:

$$S_{xq} = \pi r l$$

Diện tích toàn phần của hình nón bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy.

- **Chú ý:** Nếu cắt mặt xung quanh của hình nón theo một đường sinh rồi trải ra trên một mặt phẳng thì ta được một hình quạt có bán kính bằng độ dài đường sinh và một cung tròn có độ dài bằng chu vi đường tròn đáy của hình nón. Khi đó:
 $S_{xq} = S_{quạt} = \pi r l$.



5. Thể tích khối nón

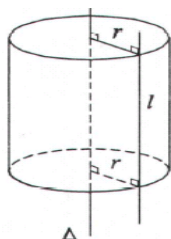
Thể tích khối nón là giới hạn của thể tích khối chóp đều nội tiếp khối nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn, với h là khoảng cách từ đỉnh tới đáy. Khi đó:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

III. MẶT TRỤ TRÒN XOAY

1. Mặt trụ tròn xoay

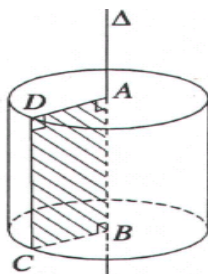
Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song nhau, cách nhau một khoảng bằng r. Khi quay (P) xung quanh Δ thì l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay. Δ gọi là trục, l gọi là đường sinh, r là bán kính của mặt trụ đó.



2. Hình trụ tròn xoay

Xét hình chữ nhật ABCD. Khi quay hình đó xung quanh đường thẳng chứa 1 cạnh, chẳng hạn AB, thì đường gấp khúc ADCB tạo thành một hình được gọi là hình trụ tròn xoay.

- Hai đáy.
- Đường sinh.
- Mặt xung quanh.
- Chiều cao.



3. Khối trụ tròn xoay

Phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ kể cả hình trụ đó được gọi là *khối trụ tròn xoay*.

- Điểm ngoài.
- Điểm trong.
- Mặt đáy, đường sinh, chiều cao

4. Diện tích xung quanh của hình trụ

a) Một hình lăng trụ được gọi là nội tiếp một hình trụ nếu hai đáy của hình lăng trụ nội tiếp hai đường tròn đáy của hình trụ.

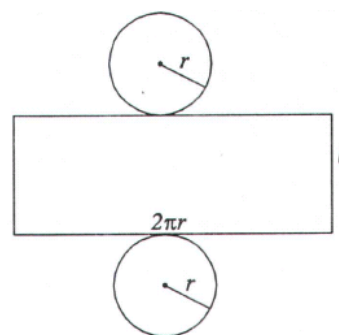
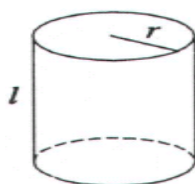
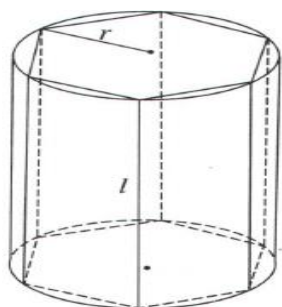
Diện tích xung quanh của hình trụ là giới hạn của diện tích xung quanh của hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

b) Diện tích xung quanh của hình trụ bằng tích độ dài đường tròn đáy và độ dài đường sinh. Khi đó: $S_{xq} = 2\pi rl$

Diện tích toàn phần của hình trụ bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích của hai đáy.

Chú ý: Nếu cắt mặt xung quanh của hình trụ theo một đường sinh, rồi trải ra trên một mặt phẳng thì sẽ được một hình chữ nhật có một cạnh bằng đường sinh l và một cạnh bằng chu vi đường tròn đáy. Khi đó:

$$S_{xq} = S_{hcn} = 2\pi rl$$



5. Thể tích khối trụ

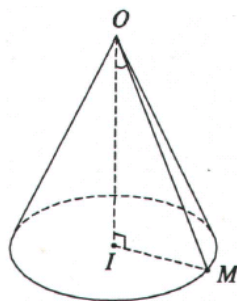
Thể tích khối trụ là giới hạn của thể tích khối lăng trụ đều nội tiếp khối trụ đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn, với h là khoảng cách giữa hai mặt đáy. Khi đó:

$$V = \pi r^2 h$$

Ví dụ 1. Cho tam giác OIM vuông tại I, góc $IOM = 30^\circ$, $IM = 2a$. Khi quay $\triangle OIM$ quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

b) Tính thể tích khối nón tròn xoay tạo thành.

**Giải**

Ta có: $l = OM = 4a$. Do đó: $S_{xq} = \pi r l = 4\pi a^2$

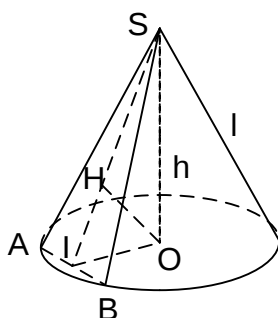
Ta có: $h = OI = 2a\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{8\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 2. Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = 20\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\text{ cm}$.

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón.

b) Tính thể tích khối nón tạo thành.

c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12 cm . Tính diện tích thiết diện đó.

**Giải**

a) Ta có: $SB = \sqrt{h^2 + r^2} = 5\sqrt{41}$. $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 25 \cdot 5\sqrt{41} = 125\sqrt{41} \pi \text{ cm}^2$.

b) Thể tích khối nón là: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 25^2 \cdot 20 = 12500\pi \text{ cm}^3$

c) Ta có: $OH \perp SI$ (I là trung điểm của AB), Do đó: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OI = 15 \text{ (cm)}$

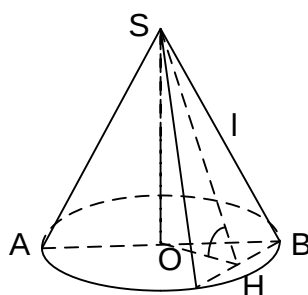
$AB = 2IB = 40\text{cm}$, $SI = 25\text{cm}$ là đường cao của tam giác SAB.

Vậy: $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SI \cdot AB = 25 \cdot 20 = 500\text{cm}^2$.

Ví dụ 3. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục của hình nón ta được một tam giác SAB vuông cân tại S có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mp(SBC) tạo với mp chứa đáy hình nón một góc 60° . Tính diện tích tam giác SBC.



Giải

a) $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $l = a$. Khi đó:

$$S_{xq} = \frac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}, S_{\text{đáy}} = \frac{\pi a^2}{2}; V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$$

b) Ta có: $\angle SHO = 60^\circ$. Do đó: $OH = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$, $BC = 2HB = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, $SH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$$\Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{3}.$$

BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H là trung điểm BC. Cho tam giác SAB quay quanh SA 360° để tạo thành hình nón. Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Cho tam giác SAC quay quanh SA 360° để tạo thành hình nón. Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

Bài 3. Cho hình nón tròn xoay có độ dài đường sinh $l = 40\text{cm}$, bán kính đáy $r = 20\text{ cm}$.

- a) Tính diện tích xung quanh của hình nón.
- b) Tính thể tích khối nón tạo thành.
- c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 5 cm. Tính diện tích thiết diện đó.

Bài 4. Một hình trụ có bán kính đáy R và đường cao $R\sqrt{3}$. A và B là 2 điểm trên 2 đường tròn đáy sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ là 30° .

- a) Tính diện tích thiết diện qua AB và song song với trục của hình trụ.
- b) Tính S_{xq} , S_{tp} , V của khối trụ.

§2. MẶT CẦU

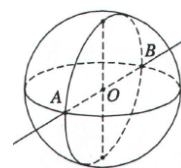
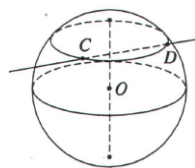
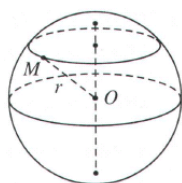
I. MẶT CẦU VÀ CÁC KHÁI NIỆM LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

1. Mặt cầu

Tập hợp những điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng không đổi bằng r ($r > 0$) được gọi là mặt cầu tâm O bán kính r . Kí hiệu $S(O; r)$.

$$S(O; r) = \{M | OM = r\}$$

- Một mặt cầu được xác định nếu biết tâm và bán kính của nó.



2. Điểm nằm trong và nằm ngoài mặt cầu. Khối cầu

- Cho $S(O; r)$ và điểm A bất kì.

- $OA = r \Leftrightarrow A$ nằm trên (S)
- $OA < r \Leftrightarrow A$ nằm trong (S)
- $OA > r \Leftrightarrow A$ nằm ngoài (S)

- Tập hợp các điểm thuộc $S(O; r)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là khối cầu hoặc hình cầu tâm O bán kính r .

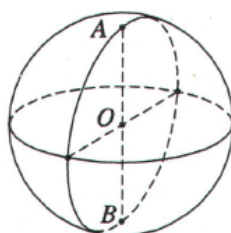
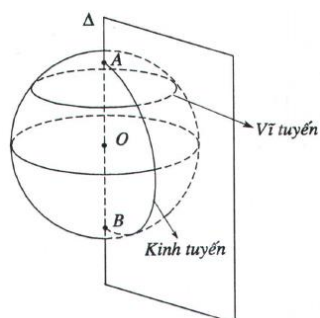
3. Đường kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu

- Mặt cầu là mặt tròn xoay được tạo bởi một nửa đường tròn quay quanh trục chứa đường kính của đường tròn đó.
- Giao tuyến của mặt cầu với các nửa mặt phẳng có bờ là trục của mặt cầu được gọi là kinh tuyến của mặt cầu.
- Giao tuyến (nếu có) của mặt cầu với các mặt phẳng vuông góc với trục được gọi là vĩ tuyến của mặt cầu.
- Hai giao điểm của mặt cầu với trục được gọi là hai cực.

4. Biểu diễn mặt cầu

Nhận xét: Hình biểu diễn của mặt cầu qua phép chiếu vuông góc là một hình tròn.

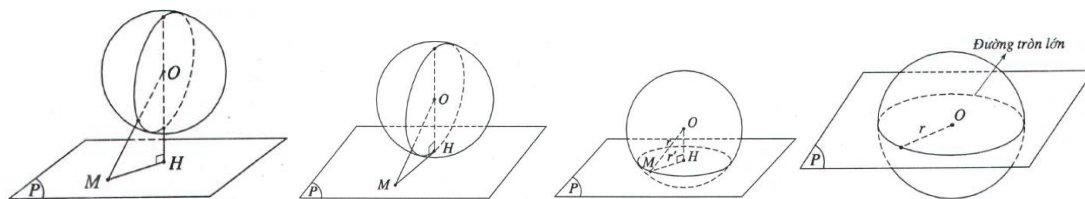
- Vẽ một đường tròn có tâm và bán kính là tâm và bán kính của mặt cầu.
- Vẽ thêm một vài kinh tuyến, vĩ tuyến của mặt cầu đó.



II. GIAO CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

Cho mặt cầu $S(O; r)$ và mặt phẳng (P) . Đặt $h = d(O, (P))$.

- $h > r \Leftrightarrow (P)$ và (S) không có điểm chung.
- $h = r \Leftrightarrow (P)$ tiếp xúc với (S) .
- $h < r \Leftrightarrow (P)$ cắt (S) theo đường tròn tâm H, bán kính $r' = \sqrt{r^2 - h^2}$.



Chú ý:

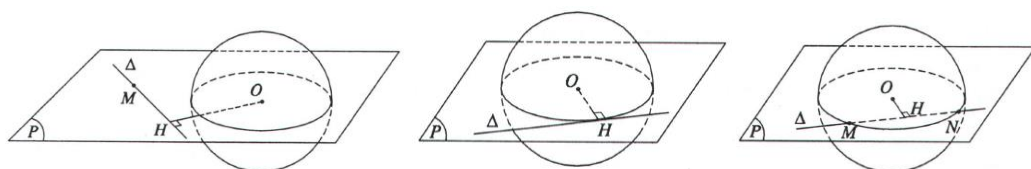
- Điều kiện cần và đủ để (P) tiếp xúc với $S(O; r)$ tại H là (P) vuông góc với OH tại H.

- Nếu $h = 0$ thì (P) cắt (S) theo đường tròn tâm O bán kính r. Đường tròn này được gọi là đường tròn lớn và (P) được gọi là mặt phẳng kính của mặt cầu (S).

III. GIAO CỦA MẶT CẦU VỚI ĐƯỜNG THẲNG. TIẾP TUYẾN CỦA MẶT CẦU

Cho mặt cầu $S(O; r)$ và đường thẳng Δ . Gọi $d = d(O, \Delta)$.

- $d > r \Leftrightarrow \Delta$ và (S) không có điểm chung.
- $d = r \Leftrightarrow \Delta$ tiếp xúc với (S).
- $d < r \Leftrightarrow \Delta$ cắt (S) tại hai điểm M, N phân biệt.



▪ Chú ý:

- ❖ Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; r)$ tại điểm H là Δ vuông góc với bán kính OH tại H. Δ được gọi là tiếp tuyến, H được gọi là tiếp điểm.
- ❖ Nếu $d = 0$ thì Δ đi qua tâm O và cắt (S) tại hai điểm A, B. AB là đường kính của (S).

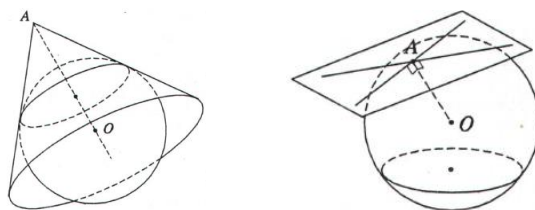
Nhận xét:

a) Qua một điểm A nằm trên mặt cầu $S(O; r)$ có vô số tiếp tuyến của (S). Tất cả các tiếp tuyến này đều nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A.

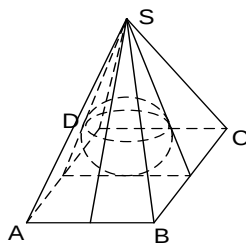
b) Qua một điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O; r)$ có vô số tiếp tuyến với (S). Các tiếp tuyến này tạo thành một mặt nón đỉnh A. Khi đó độ dài các đoạn thẳng kẻ từ A đến các tiếp điểm đều bằng nhau.

– Tại mỗi điểm trên đường tròn có 1 tiếp tuyến.

– Qua 1 điểm nằm ngoài đường tròn có 2 tiếp tuyến. Các đoạn tiếp tuyến là bằng nhau.



- Mặt cầu được gọi là nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện.
- Mặt cầu được gọi là ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu.



IV. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU

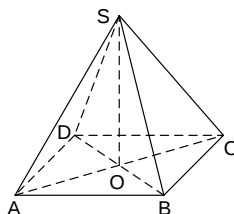
Cho mặt cầu $S(O; r)$.

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi r^2$
- Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

▪ Chú ý:

- Diện tích mặt cầu bằng 4 lần diện tích hình tròn lớn của mặt cầu đó.
- Thể tích khối cầu bằng thể tích khối chóp có diện tích đáy bằng diện tích mặt cầu và có chiều cao bằng bán kính của khối cầu đó.

Ví dụ 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, ΔSAC vuông tại S . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



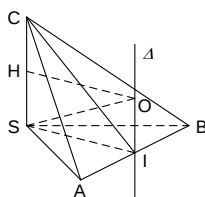
Giải

$$\Delta SAC \text{ vuông tại } S \Rightarrow OS = OA = OC$$

$$\Rightarrow OS = OA = OC = OB = OD$$

$\Rightarrow O$ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Khi đó: $R = OA = a$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và ba cạnh SA , SB , SC đôi một vuông góc. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



Giải

Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó: I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB . Qua I dựng trục Δ vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt trung trực của SC cắt Δ tại một điểm O . Khi đó:

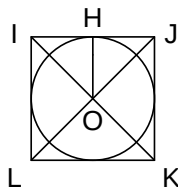
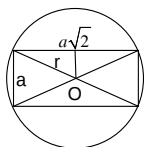
$OA = OB = OC = OS \Rightarrow O \in \Delta$ và O thuộc mặt phẳng trung trực của SC .

$$R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$

Ví dụ 3. Cho mặt cầu bán kính 2cm. Tính thể tích của hình lập phương:

a) Nội tiếp mặt cầu.

b) Ngoại tiếp mặt cầu.



Giải:

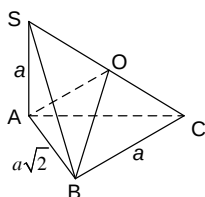
Cạnh hình lập phương nội tiếp mặt cầu: $a = 2\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow V_1 = 16\sqrt{2} \text{ cm}^3$.

Cạnh hình lập phương ngoại tiếp mặt cầu: $b = 4\text{cm} \Rightarrow V_2 = 64 \text{ cm}^3$

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi O là trung điểm của SC.

a) Chứng minh A, B, C, S cùng nằm trên một mặt cầu.

b) Cho $SA = BC = a$ và $AB = a\sqrt{2}$. Tính bán kính mặt cầu trên.



Giải:

a) $\triangle SAC$ vuông tại A $\Rightarrow OA = OC = OS$

$\triangle SBC$ vuông tại B $\Rightarrow OB = OC = OS$

b) Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3a^2$

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = 4a^2 \Rightarrow SC = 2a \Rightarrow R = a.$$

BÀI TẬP

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H là trung điểm BC. Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 3. Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy là a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60° .

a) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b) Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu tương ứng.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi O là trung điểm của SC .

- a) Chứng minh A, B, C, S cùng nằm trên một mặt cầu.
b) Cho $SA = BC = a\sqrt{2}$ và $AB = a$. Tính bán kính mặt cầu trên.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , ΔSAC vuông tại S . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3$, $SB = 4$, $SC = 5$ và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài 3. Cho tam giác OIM vuông tại I , góc $IOM = 45^\circ$, $IM = a$. Khi quay ΔOIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay.

- a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.
b) Tính thể tích khối nón tròn xoay tạo thành.

Bài 4. Cho hình nón tròn xoay có đường cao $h = a$, bán kính đáy $r = b$.

- a) Tính diện tích xung quanh của hình nón.
b) Tính thể tích khối nón tạo thành.
c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là d . Tính diện tích thiết diện đó.

Bài 5. Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục của hình nón ta được một tam giác SAB vuông cân tại S có cạnh huyền bằng $a\sqrt{3}$.

- a) Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.
b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho $mp(SBC)$ tạo với mp chứa đáy hình nón một góc 45° . Tính diện tích tam giác SBC .

Bài 6. Cho mặt cầu bán kính r . Tính thể tích của hình lập phương:

- a) Nội tiếp mặt cầu; b) Ngoại tiếp mặt cầu.

Bài 7. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a

- a. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương
b. Tính diện tích mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương

Bài 8. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h

Bài 9. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp, tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao h

Bài 10. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC

biết $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và SA , SB , SC đôi một vuông góc. CMR: điểm S, trọng tâm ΔABC , và tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC thẳng hàng.

Bài 11. Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; r)$, $(O'; r)$. Khoảng cách giữa hai đáy là $OO' = r\sqrt{3}$. Một hình nón có đỉnh O' và có đáy là hình tròn $(O; r)$.

- a) Gọi S_1 là diện tích xung quanh của hình trụ, S_2 là diện tích xung quanh của hình nón.

Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

- b) Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Bài 12. Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O; r)$ kẻ hai đường thẳng cắt mặt cầu lần lượt tại A, B và C, D.

- a) Chứng minh: $MA.MB = MC.MD$
b) Đặt $MO = d$. Tính $MA.MB$ theo r và d.

Bài 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

Bài 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và điểm K thuộc cạnh CC' sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Mặt phẳng (P) qua A, K và song song với BD , chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Tính thể tích của hai khối đa diện đó.

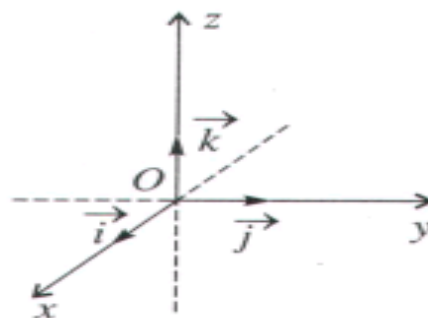
CHƯƠNG II. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§3. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ CỦA VECTOR

1. Hệ toạ độ

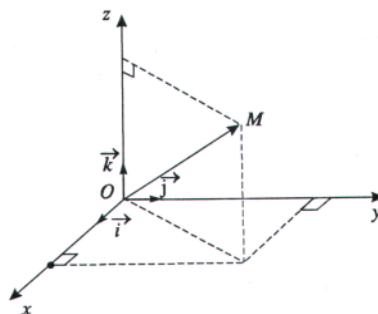
Hệ toạ độ Đề-các vuông góc trong không gian là hệ gồm 3 trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một, với các vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.



$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

A. Toạ độ của một điểm



$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ví dụ 1: Xác định các điểm $M(0;0;0)$, $A(0; 1; 2)$, $B(1; 0; 2)$, $C(1; 2; 0)$ trong không gian Oxyz.

2. Toạ độ của vector

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

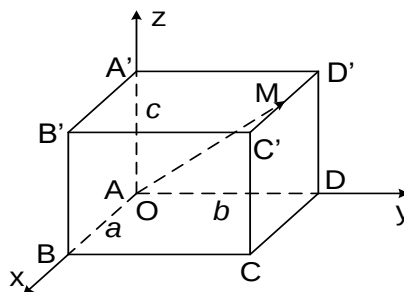
Nhận xét:

- $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$

- Toạ độ của các vector đơn vị:

$$\vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1) \bullet \vec{0} = (0; 0; 0)$$

Ví dụ 2: Trong KG Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với O, các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Tính toạ độ các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AM}$, với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.



II. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTOR

Định lý: Trong KG Oxyz, cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó:

i) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

ii) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

$$\text{iii) } k\vec{a} = k(a_1; a_2; a_3) = (ka_1; ka_2; ka_3) \quad (k \in \mathbb{R})$$

▪ **Hệ quả:**

$$\bullet \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } \vec{b} \neq \vec{0}:$$

$\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Cho } A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$M \text{ là trung điểm của đoạn } AB: M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

III. TÍCH VÔ HƯỚNG

1. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Định lý: Trong KG Oxyz, cho: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

2. Ứng dụng

a) Độ dài của một vector

$$\bullet |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

b) Khoảng cách giữa hai điểm

$$\bullet AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

c) Góc giữa hai vector

$$\bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Từ đó suy ra $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

Ví dụ 3: Trong KG Oxyz, cho A(1;1;1), B(-1;2;3), C(0;4;-2).

a) Tìm tọa độ các vector $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$, $\vec{AM}$ (M là trung điểm của BC).

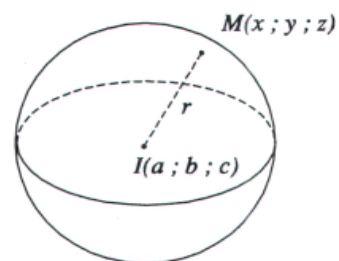
b) Tìm tọa độ của vector: $\vec{AC} + 3\vec{AB}$, $\vec{AB} - 2\vec{AC}$

c) Tính các tích vô hướng: $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AB} \cdot (2\vec{AC})$

IV. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Định lí: Trong KG Oxyz, mặt cầu (S) tâm I(a; b; c), bán kính r có phương trình:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$



Ví dụ 4: Viết phương trình mặt cầu có tâm I(1; -2; 3) và bán kính r = 5.

Nhận xét: Phương trình:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu có tâm

I(-a; -b; -c) và bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ví dụ 5: Xác định tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 5 = 0$$

Giải

Phương trình mặt cầu đã cho tương đương với phương trình sau:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 3^2$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I = (-2; 1; -3)$, bán kính $r = 3$.

Ví dụ 4: Xác định tâm và bán kính của mặt cầu có phương trình:

a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 64$

c) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 2z - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z + 5 = 0$

Ví dụ 5: Viết phương trình mặt cầu (S):

a) (S) có tâm $I(1; -3; 5)$, $r = \sqrt{3}$

b) (S) có tâm $I(2; 4; -1)$ và đi qua điểm $A(5; 2; 3)$

c) (S) có đường kính AB với $A(2; 4; -1)$, $B(5; 2; 3)$.

BÀI TẬP

1. Cho ba vector $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

a) Tính tọa độ của vector $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$.

b) Tính tọa độ của vector $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

2. Cho ba điểm $A = (1; -1; 1)$, $B = (0; 1; 2)$, $C = (1; 0; 1)$.

Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

3. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D' biết $A = (1; 0; 1)$, $B = (2; 1; 2)$, $D = (1; -1; 1)$, $C' = (4; 5; -5)$. Tính tọa độ còn lại của hình hộp.

4. Tính

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ với $\vec{a} = (3; 0; -6)$, $\vec{b} = (2; -4; 0)$;

b) $\vec{c} \cdot \vec{d}$ với $\vec{c} = (1; -5; 2)$, $\vec{d} = (4; 3; -5)$.

5. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình sau:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$;

b) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$.

6. Lập phương trình mặt cầu trong hai trường hợp sau:

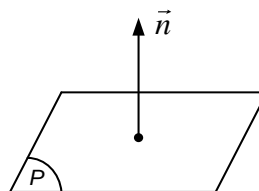
a) Có đường kính AB với $A = (4; -3; 7)$, $B = (2; 1; 3)$.

b) Đi qua điểm $A = (5; -2; 1)$ và có tâm $C = (3; -3; 1)$.

§4. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

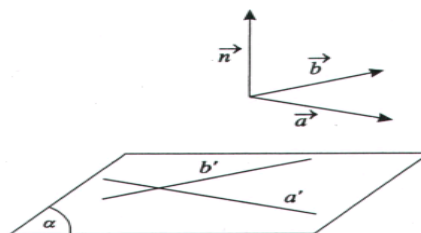
I. VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG

Định nghĩa: Cho mp (P). Nếu vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với (P) thì $\vec{n}$ đgl **vector pháp tuyến** của (P).



▪ **Chú ý:** Nếu $\vec{n}$ là VTPT của (P) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là VTPT của (P).

Vector $\vec{n}$ xác định $\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ đgl **tích có hướng** (hay **tích vector**) của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Kí hiệu: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ hoặc $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.



Nhận xét:

• Tích có hướng của hai vector cũng là một vector.

- Cặp vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ ở trên đgl **cặp VTCP** của (P).

Ví dụ 1: Tìm một VTPT của mặt phẳng:

- a) Qua A(2; -1; 3), B(4; 0; 1), C(-10; 5; 3).
 b) Qua A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2).

Giải

- a) $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -2)$; $\overrightarrow{AC} = (-12; 6; 0)$; $\overrightarrow{BC} = (-14; 5; 2)$
 $\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (12; 24; 24) = (1; 2; 2).$
 b) $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-2; 0; 2)$; $\overrightarrow{BC} = (-2; 2; 0)$
 $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = (12; 24; 24)$

II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa: Phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, được gọi là **phương trình tổng quát** của mặt phẳng.

▪ **Nhận xét:**

- a) (P): $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow (P)$ có 1 VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$.
 b) PT của (P) qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Ví dụ 2: Hãy tìm một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α): $4x - 2y - 6z + 7 = 0$.

Ví dụ 3: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (MNP) với M(1; 1; 1), N(4; 3; 2), P(5; 2; 1).

Giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (3; 2; 1)$; $\overrightarrow{MP} = (4; 1; 0)$.

Gọi $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = (-1; 4; -5)$.

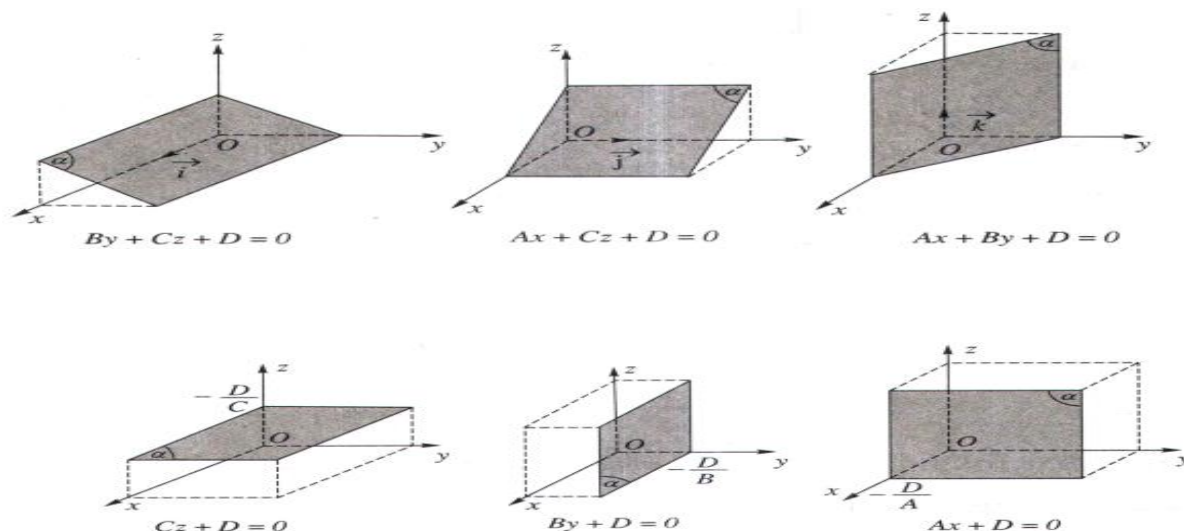
Phương trình mặt phẳng (MNP) đi qua M(1; 1; 1) và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (-1; 4; -5)$ là: $-1(x-1) + 4(y-1) - 5(z-1) = 0 \Leftrightarrow -x + 4y - 5z + 2 = 0$

2. Các trường hợp riêng

a) $D = 0 \Leftrightarrow (P)$ đi qua O .

b) $A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (P) \supset O_x \\ (P) \parallel O_x \end{cases}$

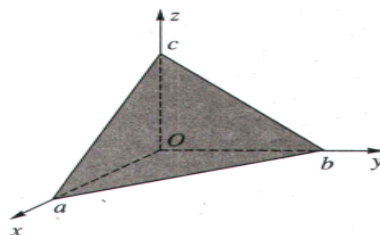
c) $A = B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (P) \parallel (O_{xy}) \\ (P) \equiv (O_{xy}) \end{cases}$



Nhận xét: Nếu các hệ số A, B, C, D đều khác 0 thì có thể đưa phương trình của (P) về dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (2)$$

(2) được gọi là **phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn**.



III. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẪNG SONG SONG, VUÔNG GÓC

1. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong KG cho 2 mp $(P_1), (P_2)$:

$$(P_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$(P_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\bullet (P_1) // (P_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$

$$\bullet (P_1) \equiv (P_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$$

$$\bullet (P_1) \text{ cắt } (P_2)$$

$$\Leftrightarrow (A_1; B_1; C_1) \neq k(A_2; B_2; C_2)$$

Ví dụ 4: Cho hai mp (P_1) và (P_2) :

$$(P_1): x - my + 4z + m = 0$$

$$(P_2): x - 2y + (m + 2)z - 4 = 0$$

Tìm m để (P_1) và (P_2) :

a) song song

b) trùng nhau

c) cắt nhau.

Ví dụ 5: Viết PT mp (P) đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và song song với mp (Q) : $2x - 3y + z + 5 = 0$.

Giải

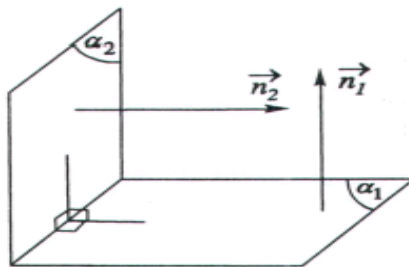
Vì $(P) // (Q)$ nên (P) có VTPT $\vec{n} = (2; -3; 1)$.

$$\Rightarrow (P): 2(x-1)-3(y+2)+1(z-3)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-3y+z-11=0.$$

2. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

$$(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$



Ví dụ 6: Xác định m để hai mp sau vuông góc với nhau:

$$(P): 2x - 7y + mz + 2 = 0$$

$$(Q): 3x + y - 2z + 15 = 0$$

Giải

$$(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 7: Viết phương trình mp (P) đi qua hai điểm $A(3; 1; -1)$, $B(2; -1; 4)$ và vuông góc với mp (Q): $2x - y + 3z - 1 = 0$.

Giải

(P) có cặp VTCP là:

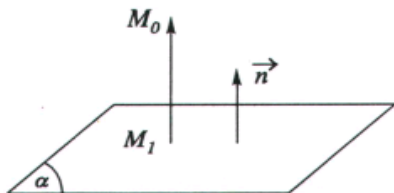
$$\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 5) \text{ và } \vec{n}_Q = (2; -1; 3); \vec{n}_P = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_Q] = (-1; 13; 5)$$

$$\Rightarrow (P): x - 13y - 5z + 5 = 0.$$

IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Định lý: Trong KG Oxyz, cho (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

$$d(M_0; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Ví dụ 8: Tính khoảng cách từ điểm M đến mp(P):

- a) $M(1; -2; 13)$; (P): $2x - 2y - z + 3 = 0$ b) $M(2; -3; 5)$; (P): $2x - y + 2z - 6 = 0$
 c) $M(1; -4; -2)$; (P): $x + y + 5z - 14 = 0$ d) $M(3; 1; -2)$; (P) $\equiv (Oxy)$

Giải

a) $d(M, (P)) = \frac{4}{3}$; b) $d(M, (P)) = \frac{11}{3}$

c) $d(M, (P)) = \sqrt{27}$; d) $d(M, (P)) = 2$

Ví dụ 9: Tính khoảng cách giữa hai mp song song (P) và (Q):

- a) (P): $x + 2y + 2z + 11 = 0$; (Q): $x + 2y + 2z + 2 = 0$
 b) (P): $4x - y + 8z + 1 = 0$; (Q): $4x - y + 8z + 5 = 0$

Giải

Bằng khoảng cách từ 1 điểm trên mp này đến mp kia.

- a) Lấy $M(0; 0; -1) \in (Q)$.

$$d((P), (Q)) = d(M, (P)) = 3$$

- b) Lấy $M(0; 1; 0) \in (P)$

$$d((P), (Q)) = d(M, (Q)) = \frac{4}{9}$$

Ví dụ 10: Viết pt mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mp (P):

$$\text{a) } \begin{cases} I(3; -5; -2) \\ (P): 2x - y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} I(1; 4; 7) \\ (P): 6x + 6y - 7z + 42 = 0 \end{cases}$$

Giải

$$R = d(I, (P))$$

$$\text{a) } (x-3)^2 + (y+5)^2 + (z+2)^2 = \frac{162}{7}$$

$$\text{b) } (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-7)^2 = \left(\frac{23}{11}\right)^2$$

Ví dụ 11: Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M:

$$\text{a) } \begin{cases} (S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24 \\ M(-1; 3; 0) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49 \\ M(7; -1; 5) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Ta có: } \vec{n} = \overrightarrow{IM}$$

$$\text{a) } (P): -4(x+1) + 2(y-3) + 2z = 0$$

$$\text{b) } (P): 6(x-7) + 2(y+1) + 3(z-5) = 0$$

BÀI TẬP

1. Viết phương trình của mặt phẳng:

a) Đi qua điểm M(1; -2; 4) và nhận $\vec{n} = (2; 3; 5)$ làm vector pháp tuyến;

b) Đi qua điểm A(0; -1; 2) và song song với giá của mỗi vector $\vec{u} = (3; 2; 1)$ và $\vec{v} = (-3; 0; 1)$.

- c) Đi qua 3 điểm $A(-3; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; -1)$.
2. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(2; 3; 7)$, $B(4; 1; 3)$.
3. a) Lập phương trình của các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oyz), (Oxz).
- b) Lập phương trình của các mặt phẳng đi qua điểm $M(2; 6; -3)$ và lần lượt song song với các mặt phẳng tọa độ.
4. Lập phương trình của mặt phẳng:
- a) Chứa trục Ox và điểm $P(4; -1; 2)$;
- b) Chứa trục Oy và điểm $Q(1; 4; -3)$;
- c) Chứa trục Oz và điểm $R(3; -4; 7)$.
5. Cho tứ diện có các đỉnh là $A(5; 1; 3)$, $B(1; 6; 2)$, $C(5; 0; 4)$, $D(4; 0; 6)$.
- a) Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD).
- b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD .
6. Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng (β): $2x - y + 3z + 4 = 0$.
7. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(5; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (β): $2x - y + z - 7 = 0$.
8. Xác định các giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây là một cặp mặt phẳng song song với nhau:
- a) $2x + my + 3z - 5 = 0$ và $nx - 8y - 6z + 2 = 0$;
- b) $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $2x + ny - 3z + 1 = 0$.
9. Tính khoảng cách từ điểm $A(2; 4; -3)$ lần lượt đến các mặt phẳng sau:
- a) $2x - y + 2z - 9 = 0$;
- b) $12x - 5z + 5 = 0$;

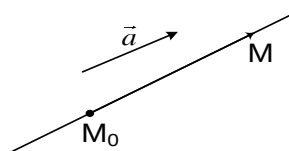
c) $x = 0$.

§5. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định lí: Trong KG $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm VTCP. Điều kiện cần và đủ để điểm $M(x; y; z)$ nằm trên Δ là có một số thực t sao cho:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$



Định nghĩa: Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ là phương trình có dạng:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

trong đó t là tham số.

- **Chú ý:** Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì có thể viết phương trình của Δ dưới dạng chính tắc:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Ví dụ 1: Viết PTTS của đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 và có VTCP $\vec{a}$, với:

a) $M(1; 2; -3), \vec{a} = (-1; 3; 5)$

b) $M(0; -2; 5), \vec{a} = (0; 1; 4)$

c) $M(1;3;-1), \vec{a} = (1;2;-1)$

d) $M(3;-1;-3), \vec{a} = (1;-2;0)$

Ví dụ 2: Cho các điểm $A(2;3;-1)$, $B(1;2;4)$, $C(2;1;0)$, $D(0;1;2)$. Viết PTTS của các đường thẳng AB , AC , AD , BC .

Giải

$$\vec{AB} = (-1;-1;5), A(2;3;-1)$$

$$\Rightarrow \text{PTTS của } AB: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

Các phương trình đường thẳng còn lại HS tự giải tương tự.

Ví dụ 3: Viết PTTS của Δ đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) :

a) $A(-2;4;3), (P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$; b) $A(3;2;1), (P): 2x - 5y + 4 = 0$;

c) $A(1;-1;0), (P) \equiv (Oxy)$;

d) $A(2;-3;6), (P) \equiv (Oyz)$;

Giải

a) Vì $\Delta \perp (P)$ nên $\vec{a} = \vec{n} = (2;-3;6)$

$$\Rightarrow \text{PTTS của } \Delta: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$

Ví dụ 4: Cho đường thẳng Δ có PTTS. Hãy xác định một điểm $M \in \Delta$ và một VTCP của Δ .

$$\Delta: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

Giải

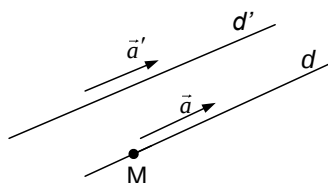
Cho $t = t_0$, thay vào PT của Δ . Với $t = 0 \Rightarrow M(-1; 3; 5) \in \Delta$.

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG, CẮT NHAU, CHÉO NHAU

1. Điều kiện để hai đường thẳng song song

Gọi $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$ lần lượt là VTCP của d và d' . Lấy $M(x_0; y_0; z_0) \in d$.

$$d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k\vec{a}' \\ M \notin d' \end{cases}$$



Đặc biệt: $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = k\vec{a}' \\ M \in d' \end{cases}$

Ví dụ 5: Chứng minh hai thẳng sau song song song:

a) $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=3-t \end{cases}; d': \begin{cases} x=2+2t' \\ y=2+4t' \\ z=5-2t' \end{cases}$

b) $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=3+2t \end{cases}; d': \begin{cases} x=-1-2t' \\ y=2-t' \\ z=-3-2t' \end{cases}$

c)

$$d: \frac{x-1}{9} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{3}$$

$$d': \frac{x-7}{6} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-5}{2}$$

Giải

a) $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{a}' = (2; 4; -2)$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{a}'$ cùng phương.

Ví dụ 6: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với đường thẳng d cho trước:

a) $A(2; -5; 3)$, d:
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$$

b) $A(1; -3; 2)$, d:
$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$$

c) $A(4; -2; 2)$, d:
$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{3}$$

d) $A(5; 2; -3)$, d:
$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{4}$$

Giải

Vì $\Delta \parallel d$ nên Δ cũng nhận VTCP của d làm VTCP.

a) Phương trình đường thẳng đi qua $A(2; -5; 3)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (-3; 4; -2)$ là:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -5 + 4t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

b) , c) , d) giải tương tự như câu a).

2. Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau

Cho 2 đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, d': \begin{cases} x = x'_0 + t'a'_1 \\ y = y'_0 + t'a'_2 \\ z = z'_0 + t'a'_3 \end{cases}$$

d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow$ hệ pt ẩn t, t' sau có đúng 1 nghiệm:

$$\begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases} (*)$$

Ví dụ 7: Tìm giao điểm của hai đường thẳng sau:

$$\text{a) } d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+3t \\ z=3-t \end{cases}, d': \begin{cases} x=2-2t' \\ y=-2+t' \\ z=1+3t' \end{cases}$$

$$\text{b) } d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1-t \end{cases} \\ d': \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$\text{c) } d: \begin{cases} x=3t \\ y=1-2t \\ z=3+t \end{cases}, d': \begin{cases} x=1+t' \\ y=2t' \\ z=4+t' \end{cases}$$

$$\text{d) } d: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=-2+3t \\ z=6+4t \end{cases}, d': \begin{cases} x=5+t' \\ y=-1-4t' \\ z=20+t' \end{cases}$$

Ví dụ 8: Tìm m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Khi đó tìm tọa độ giao điểm của chúng

$$\text{a) } d: \begin{cases} x=1+mt \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}, d': \begin{cases} x=1-t' \\ y=2+2t' \\ z=3-t' \end{cases}$$

$$\text{b) } d: \begin{cases} x=1-t \\ y=3+2t \\ z=m+t \end{cases}, d': \begin{cases} x=2+t' \\ y=1+t' \\ z=2-3t' \end{cases}$$

3. Điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau

Cho 2 đường thẳng

$$d: \begin{cases} x=x_0+ta_1 \\ y=y_0+ta_2 \\ z=z_0+ta_3 \end{cases}, d': \begin{cases} x=x'_0+t'a'_1 \\ y=y'_0+t'a'_2 \\ z=z'_0+t'a'_3 \end{cases}$$

d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow$ hai VTCP không cùng phương và hệ pt ẩn t, t' sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x_0+ta_1=x'_0+t'a'_1 \\ y_0+ta_2=y'_0+t'a'_2 \\ z_0+ta_3=z'_0+t'a'_3 \end{cases} (*)$$

$$\bullet d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{a}'.$$

Ví dụ 9: Chứng tỏ các cặp đường thẳng sau chéo nhau:

a) $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=5+t \end{cases}, d': \begin{cases} x=1+3t' \\ y=-2+2t' \\ z=-1+2t' \end{cases}$

b) $d: \begin{cases} x=1-2t \\ y=3+t \\ z=-2-3t \end{cases}, d': \begin{cases} x=2t' \\ y=1+t' \\ z=3-2t' \end{cases}$

$$\text{c) } \begin{aligned} d: \frac{x-2}{3} &= \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2} \\ d': \frac{x}{1} &= \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \begin{aligned} d: \frac{x-7}{1} &= \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \\ d': \frac{x-3}{-7} &= \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \end{aligned}$$

BÀI TẬP

- Viết phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:
 - d đi qua điểm $M(5; 4; 1)$ và có vector chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$;
 - d đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α) có phương trình $x + y - z + 5 = 0$;
 - d đi qua điểm $B(2; 0; -3)$ và song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$;
 - d đi qua hai điểm $P(1; 2; 3)$ và $Q(5; 4; 4)$.
- Viết phương trình tham số của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ lên các mặt phẳng sau:
 - (Oxy) ;
 - (Oyz) .
- Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau:
 - $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$;
 - $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$.

4. Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau:

$$d: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}.$$

5. Tìm số giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

$$a) \quad d: \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad (\alpha): 3x + 5y - z - 2 = 0;$$

$$b) \quad d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad (\alpha): x + 3y + z + 1 = 0;$$

$$c) \quad d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{và} \quad (\alpha): x + y + z - 4 = 0;$$

$$6. \quad \text{Tính khoảng cách giữa đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và mặt phẳng}$$

$$(\alpha): 2x - y + z + 3 = 0.$$

$$7. \quad \text{Cho điểm } A(1; 0; 0) \text{ và đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}.$$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ .

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ .

8. Cho điểm $M(1; 4; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$.

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) .

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α) .

c) Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) .

9. Cho hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 1 \end{cases}.$$

Chứng minh d và d' chéo nhau.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

- Cho bốn điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(-2; 1; -1)$.
 - Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.
 - Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD .
 - Tính độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$.
- Cho mặt cầu (S) có đường kính là AB biết rằng $A(6; 2; -5)$, $B(-4; 0; 7)$.
 - Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của mặt cầu (S) .
 - Lập phương trình của mặt cầu (S) .
 - Lập phương trình của mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A .
- Cho bốn điểm $A(-2; 6; 3)$, $B(1; 0; 6)$, $C(0; 2; -1)$, $D(1; 4; 0)$.
 - Viết phương trình mặt phẳng (BCD) . Suy ra $ABCD$ là một tứ diện.
 - Tính chiều cao AH của tứ diện $ABCD$.
 - Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa AB và song song với CD .
- Lập phương trình tham số của đường thẳng:
 - Đi qua hai điểm $A(1; 0; -3)$, $B(3; -1; 0)$.
 - Đi qua điểm $M(2; 3; -5)$ và song song với đường thẳng Δ có phương trình

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = -5t \end{cases}$$

- Cho mặt cầu (S) có phương trình: $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ và mặt

phẳng (α) có phương trình $2x - 2y - z + 9 = 0$. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) .

Hãy xác định tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn (C) .

- Cho mặt phẳng (α) có phương trình $3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng d có phương trình

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

- a) Tìm giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (α).
- b) Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa điểm M và vuông góc với đường thẳng d.

7. Cho điểm A(-1; 2; -3), vector $\vec{a} = (6; -2; -3)$ và đường thẳng d có phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t. \end{cases}$$

- a) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa điểm A và vuông góc với giá của $\vec{a}$.
- b) Tìm giao điểm M của d và (α).
- c) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với giá của $\vec{a}$ và cắt đường thẳng d.

8. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M(1;-1; 2) trên mặt

phẳng (α): $2x - y + 2z + 11 = 0$.

9. Cho điểm M(2; 1; 0) và mặt phẳng (α): $x + 3y - z - 27 = 0$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (α).

10. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) và cắt hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -4 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 4 - 5t' \end{cases}.$$

